Крицков Леонид Владимирович

Литература:

1. Ильин Позняк Основы МА
2. Ильин Садовничий Сендов МА

Глава I Теория числовых рядов

Лекция №1
04.09.18

§1 Понятие числового ряда

Пусть $\{u_n\}$ — числовая посл-ть

Тогда $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ (1) — числовой ряд

Каждому ряду сопоставляется число

$u_1 + u_2 + \ldots + u_n \equiv S_n$ — частичная сумма ряда (1)

$(\forall n:\ S_{n+1} = S_n + u_{n+1})$

Опр.) Ряд (1) сходится если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, в противном случае он наз.-ся расходящимся.

S — сумма ряда (1). Обозначается $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$

1. Сходится ли ряд?
2. К чему сходится?

Раскроем опр. суммы ряда по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N \quad |S_n - S| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| -\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right| < \varepsilon .$$

$$r_n \equiv \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$ — n-й остаток ряда

Ряд (1) сходится $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$

Ex. 1 $\quad 1, q, q^2, \dots \quad (q \neq 0)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}; \quad r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} q^{k-1}; \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \begin{cases} \dfrac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \\ n, & q = 1 \end{cases}$$

(Если $q = -1$, то S_n: $1, 0, 1, 0, \dots$) ← ряд расходится

Если $|q| > 1$, то q^n — б.б. и S_n — тоже б.б. ряд расходится

Если $|q| < 1$, то q^n — Б.М., $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q}$

Ex. 2 $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

Ф-ла Маклорена для e^x:

$$e^x = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}}_{S_{n+1}} + R_n(x); \quad R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1$$

$$e^x - S_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \Rightarrow \quad \begin{aligned} & e^{\theta x} \le e^x, \quad x \ge 0 \\ & e^{\theta x} < 1, \quad x < 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left| e^x - S_{n+1} \right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}, \qquad \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Ex. 3 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n\to 1.$$

Л. Эйлер: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

Теор. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится $\Leftrightarrow\exists\lim\limits_{n\to\infty}S_n$

▶ Критерий Коши сходимости послед.-ти

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n\geq N\ \forall p\in\mathbb{N}:\ |S_{n+p}-S_n|<\varepsilon,$$

т.е. $\left|\sum\limits_{n=1}^{n+p}u_n\right|<\varepsilon$ (2)

Ряд (1) сходится $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n\geq N,\ \forall p\in\mathbb{N}$ выполнено (2) ■

Следствие 1 Необходимое условие сходимости.

Если (1) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$... (3)

] (1) сходится $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \ge N \underset{p=1}{:} |u_{n+1}| < \varepsilon$

Следствие 2:

Необх. условие не является, вообще говоря, достаточным, то есть $\exists$ ряды, у которых выполнено условие (3), но являющиеся расходящимися.

I Гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ расходится}$$

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} \ge \frac{k}{2k} = \frac{1}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1}{N+1} + \ldots + \frac{1}{2N} \ge \frac{1}{2},$$ при $\varepsilon = \frac{1}{2}$ по критерию Коши ряд расходится

Замеч. 1) Удаление из числового ряда любого конечного числа слагаемых не влияет на его сходимость (но влияет на его сумму, если сх.)

Замеч. 2) Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha u_n)$ $(\alpha \neq 0)$ сходятся / расходятся одновременно

§2 Ряды с неотрицательными слагаемыми

Рассмотрим (4) ... $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$, где $p_n \geq 0 \ \forall n$

$S_{n+1} = S_n + p_{n+1} \geq S_n \Rightarrow \{S_n\}$ не убывает

(следует из теор. о монотонных посл.-х)

Теор. 2) Ряд (4) сходится $\Leftrightarrow \{S_n\}$ ограничена.

1. Признаки сравнения

Теор. 3) (I признак)

Рассмотрим $\{p_n\}$ и $\{p_n'\}$ из неотр. чисел,

$\sum p_n$, $\sum p_n'$ — соотв.-щие ряды.

Пусть $\forall n \in \mathbb{N}: p_n \leq p_n'$. Тогда:

мажоранта

1. Если $\sum p_n'$ сход., то $\sum p_n$ сход.
2. Если $\sum p_n$ расход., то $\sum p_n'$ расход.

миноранта

] $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k$, $S_n' = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k'$

$S_n \leq S_n' \ \forall n \in \mathbb{N}$

1) $\sum p_n'$ сход. $\Rightarrow \{S_n'\}$ огр.-на сверху $\Rightarrow \{S_n\}$ огр. сверху

$\Rightarrow \sum p_n$ сход.

2.) $\sum p_n$ расход. $\Rightarrow \{S_n\}$ не огран. сверху $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{S_n\} \to +\infty \Rightarrow \{S_n'\} \to +\infty \Rightarrow \sum p_n'$ расход. ■

<u>Зам. 1</u> Нер-во $p_n \le p_n'$ в т. 3 достаточно требовать лишь начиная с некот. номера, т.е. $\forall n \geq n$ (см. зам. 1 §1)

<u>Зам. 2</u> Нер-во $p_n \le p_n'$ можно заменить на $p_n \le \alpha p_n'$ $(\alpha > 0)$ (см. зам. 2 §1)

Ex. 1 Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $\forall\alpha\geq 2$, расходится при $\forall\alpha\in(0;1]$

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n^2}\leq\frac{1}{n(n-1)}$ $\forall n\geq 2$ Сход. $\sum\frac{1}{n(n-1)}$ сход.

б) $\forall\alpha>2\Rightarrow\frac{1}{n^{\alpha}}\leq\frac{1}{n^2}$, $\sum\frac{1}{n^2}$ сход. $\Rightarrow$ Сход.

в) $\alpha=1$ гармон. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расход.

г) $0<\alpha<1$: $\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n^{\alpha}}$ $\forall n\geq 1$ $\sum\frac{1}{n}$ расход. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ расход.

Теор. 4 (II признак)

Рассм. $\{p_n\}$ и $\{p_n'\}$ из ~~неотрицательных~~ положительных чисел, $\sum p_n$, $\sum p_n'$ — соотв.-щие ряды

Пусть $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_n}{p_n'}=L>0$.

Тогда рассматриваемые ряды сход./расх. одновременно.

$\forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall n\geq N\ \left|\frac{p_n}{p_n'}-L\right|<\varepsilon$

Пусть $\varepsilon=\frac{L}{2}$, тогда $-\frac{L}{2}<\frac{p_n}{p_n'}-L<\frac{L}{2}$

$$\frac{L}{2}<\frac{p_n}{p_n'}<\frac{3L}{2}$$

$$\left(\frac{L}{2}\right)p_n'<p_n<\left(\frac{3L}{2}\right)p_n'\quad \forall n\geq N$$

■

Теор. 5 (3й признак)

Рассмотрим ряды из условия т.4 и потребуем, чтобы $\frac{p_{k+1}}{p_k}\leq\frac{p_{k+1}'}{p_k'}$ $\forall k\geq k_0$

Тогда ① Если $\sum p_k'$ сх., то $\sum p_k$ сх.

② Если $\sum p_k$ расх., то $\sum p_k'$ расх.

(сведение к т.3)

$$\frac{p_2}{p_1}\leq\frac{p_2'}{p_1'},\ \frac{p_3}{p_2}\leq\frac{p_3'}{p_2'},\ \dots,\ \frac{p_{n+1}}{p_n}\leq\frac{p_{n+1}'}{p_n'}$$

Перемножим почленно: $\frac{p_{n+1}}{p_1}\leq\frac{p_{n+1}'}{p_1'}\ \dots$ ■

Ex. 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty$$

Лекция № 2
05.09.18

a) $\ln(1+x) \le x \quad \forall x > 0$

$x = \frac{1}{k}$; $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$0 < \frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) =$$

$$= \frac{1}{k} - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \bar{o}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = \frac{1}{2k^2} + \bar{o}\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \sim \frac{1}{2k^2}, \quad k \to \infty \Rightarrow$$

$\xRightarrow{\text{Т.Ч}} \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$ сходится, обозначим сумму γ

$$H_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

$$\ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_n = \gamma + \ln(n+1) + \bar{o}(1) = \gamma + \ln n + \underbrace{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}_{\bar{o}(1)} + \bar{o}(1)$$

Утв.: $\exists$ постоянная $\gamma > 0$: $H_n = \gamma + \ln n + \bar{o}(1), \; n \to \infty$ ∎

2. Признаки Даламбера и Коши.

(D'Alembert)

Теор. 6) (признак Коши)

Рассмотрим ряд $\sum p_k$, $p_k > 0$.

I. Если $\sqrt[k]{p_k} \le q < 1$ $\forall k$, то ряд сходится

Если $\sqrt[k]{p_k} \ge 1$ $\forall k$, то ряд расходится

II Пусть $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = L$

Тогда если $L < 1$, то ряд сход.,

если $L > 1$, то ряд расх.

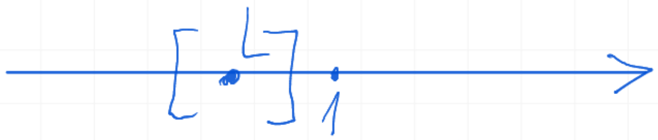
Замечание: в случае $L = 1$ признак т.6-II не действует, т.к.:

$p_k = \frac{1}{k}$, $\sqrt[k]{p_n} \to 1$, ряд расх.

$p_k = \frac{1}{k^2}$, $\sqrt[k]{p_k} \to 1$, ряд сход.

I. Если $\sqrt[k]{p_k} \le q \Rightarrow p_k \le q^k$; $q < 1$, $\sum q^k$ сход. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ (т.3) $\sum p_k$ сход.

Если $\sqrt[k]{p_k} \ge 1$, то $p_k \ge 1$ и нарушено н. усл. сх.

II. 

$\exists k_0\ \forall k \ge k_0: \sqrt[k]{p_k} \le L + \frac{1-L}{2} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ применима т. 1, значит $\sum p_k$ сходится

$\exists k_0\ \forall k \ge k_0: \sqrt[k]{p_k} \ge L - \frac{L-1}{2} > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ применима часть I, значит ряд $\sum p_k$ расход.

Зам. Утв.-е т.6-II верно, если константу L заменить на $\tilde{L} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{p_k}$

Т.о. верно, что если $\tilde{L} < 1$, то ряд сход.

если $\tilde{L} > 1$, то ряд расх.

правее $\left(\tilde{l}+\frac{1-\tilde{l}}{2}\right)$ имеется не более конечного числа $\sqrt[n]{p_n}$

$$\exists k_0: \forall n \ge k_0: \sqrt[n]{p_n} \le \left(\tilde{l}+\frac{1-\tilde{l}}{2}\right) < 1$$

$\ominus$ – аналогично. ■

Теор. 7) (Признак Даламбера)

Рассм. $\sum p_k$, $p_k > 0$

I. Если $\frac{p_{k+1}}{p_k} \le q < 1$ $\forall k \ge k_0$, то ряд сходится

Если $\frac{p_{k+1}}{p_k} \ge 1$ $\forall k \ge k_0$, то ряд расход.

II. Пусть $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L$ $\left(\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L\right)$

Тогда, если $L<1$, то ряд сход.

если $L>1$, то ряд расход. ■

▶ Док-ть самостоятельно ■

Самостоятельно привести примеры для $L=1$.

Зам. Имеется набор уточняющих признаков сходимости $\sum p_n$ (признак Раабе, Гаусса, ...), которые дают достаточн. условия сходимости в случаях, когда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p_n}=1 \vee \lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_{n+1}}{p_n}=1$.

3. Сравнение признаков Коши и Даламбера

I. Существуют ряды, сходимость которых выясняется признаком Коши ($L<1$), но не определяется признаком Даламбера ($L=1$)

II Докажем, что всякий раз, когда признак Даламбера дает определенный ответ о сходимости, то признак Коши для того же ряда дает тот же самый ответ.

▶ Для этого докажем, что если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_{n+1}}{p_n}=L$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p_n}=L$.

$$\sqrt[n]{p_n}=\sqrt[n]{\frac{p_n}{p_{n-1}}\cdot\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}\cdot\ldots\cdot\frac{p_2}{p_1}\cdot p_1}=\sqrt[n]{a_n a_{n-1}\ldots a_2 \underbrace{p_1}_{a_1}}$$

(Положим $a_{n+1}=\frac{p_{n+1}}{p_n}$ $n\geq 1$, $a_1=p_1$)

Тем самым, требуется доказать, что если $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = L$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_1 \ldots a_k} = L$, или, что то же самое, если $\lim\limits_{k\to\infty} \ln a_n = \ln L$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k}(\ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n) = \ln L$.

Пусть $\ln a_k = b_k$; тогда требуется доказать: если $\lim\limits_{k\to\infty} b_n = B$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k}(b_1 + \ldots + b_n) = B$

Действительно: $\frac{1}{k}(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) - B =$

$$= \frac{(b_1 - B) + \ldots + (b_n - B)}{k}$$

$\forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n \geq N: |b_n - B| < \varepsilon.$

Если $k \geq N$, то

$$\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{k} - B = \frac{(b_1 - B) + \ldots + (b_{n-1} - B)}{k} + \frac{(b_n - B) + \ldots + (b_k - B)}{k}$$

В силу выбора N: $\left|\frac{(b_N - B) + \ldots + (b_k - B)}{k}\right| < \varepsilon \cdot \frac{(k-N+1)}{k} < \varepsilon$

Т.к. $\{b_n\}$ сходится, то $\{b_k\}$ ограничена $\Rightarrow$
$\Rightarrow \{b_k - B\}$ ограничена, т.е.

$$\forall k: |b_k - B| \le C \Rightarrow \left|\frac{(b_1 - B) + \ldots + (b_{k-1} - B)}{k}\right| \le \frac{C(N-1)}{k} < \varepsilon$$

Выберем k так, чтобы и последняя дробь была $< \varepsilon$. ■

<u>Зам.</u> Док-во последнего утв-ния о средних арифм. может быть проведено и для случая, когда $L = 0$ $(\ln L = -\infty)$

Док-ть самостоятельно.

4. Интегральный признак Коши-Маклорена.

Теор. 8 Рассмотрим ф-цию $y=f(x)$, которая ≥ 0 и $\searrow$ на $[1;+\infty]$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сход./расх. $\Leftrightarrow$ сх./расх. несобств. интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$.

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$, $\underline{1<\alpha}<2$

$f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$, $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^\infty=\frac{1}{\alpha-1}$

Лекция №3
11.09.18

▶ $f(x)\geq 0$, $\searrow$

$\forall x\in[k-1;k]$ $\forall k\geq 2$: $f(k)\leq f(x)\leq f(k-1)\Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_{k-1}^{k} f(k)dx \leq \int\limits_{k-1}^{k} f(x)dx \leq \int\limits_{k-1}^{k} f(k-1)dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(k)\leq \int\limits_{k-1}^{k} f(x)dx \leq f(k-1)$ $\forall k\geq 2$

Сложим нер-ва по $k=1,2,\dots,n$

$$f(2)+f(3)+\dots+f(n) \le \int_1^n f(x)dx \le f(1)+\dots+f(n-1)$$

$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$; част. суммы $= S_n$

$$S_n - f(1) \le \int_1^n f(x)dx \le S_{n-1}$$

Т.к. $f(x) \ge 0$, то $\{S_n\} \nearrow$

а) Если $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, то $\int_1^n f(x)dx \le \int_1^{\infty} f dx$

① $\Rightarrow \{S_n\}$ огр. сверху $\Rightarrow$ рассм. ряд сход.

б) Если $\int_1^{\infty} f(x)dx$ расходится, то $\int_1^n f(x)dx$ неогр.

послед.-ть

② $\Rightarrow \{S_n\}$ не огр.-на $\Rightarrow$ рассм. ряд расходится ■

§3 О перестановке слагаемых

<u>Утв.</u> Рассмотрим $\forall$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и построим по нему ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Тогда из сходимости II ряда следует сходимость I ряда.

▶ Если $\sum |u_n|$ сход., то (крит. Коши)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N \ \forall p \in \mathbb{N}$:

$$\left.\begin{array}{c} \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon \\ \vee\!/ \\ \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \end{array}\right\} \Rightarrow \text{(крит. Коши)} \ \sum u_k \text{ сход.}$$

<u>Ex.</u> $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расход., $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ сходится ?!

(H_n – г. суммы)

$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$

$$S_{2n} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n+1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = H_{2n} - H_n =$$

страница 21

$$= \ln(2n) + \gamma + o(1) - \ln n - \gamma - o(1) =$$

$$= \ln 2 + o(1)$$

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1)$$

$$S_{2n} = \ln 2 + o(1); \quad S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} = \ln 2 + o(1)$$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ сходится к $\ln 2$

<u>Опр.</u> Если для сходящегося ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ ... (1) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$ сходится, то (1) наз. абсолютно сходящимся.

Если для него ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$ расходится, то (1) наз. условно сходящимся

<u>Ex.</u> $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots$

$\exists\ S_n$ – частичн. суммы этого ряда.

Рассм. $S_{3n} = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4n}\right) =$

S_3 $\frac{1}{1}$ $\quad \frac{S_6}{\frac{1}{3}}$ $\quad \frac{S_9}{\frac{1}{5}}$

$$= \left(H_{2n} - \frac{1}{2} H_n\right) - \frac{1}{2} H_{2n} = \frac{1}{2} H_{2n} - \frac{1}{2} H_n =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln 2n + \gamma + o(1)\right) - \frac{1}{2}\left(\ln n + \gamma + o(1)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 + o(1)$$

$$S_{3n+1} = S_{3n} + \frac{1}{2n+1} \longrightarrow \frac{1}{2} \ln 2$$

$$S_{3n+2} = S_{3n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n+2}$$

$$\{S_n\} = \{S_{3n}\} \cup \{S_{3n+1}\} \cup \{S_{3n+2}\}$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots = \frac{1}{2} \ln 2$$

Теор. 9 (Римана)

Для условно сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и любого числа $L \in \mathbb{R}$ существует такая перестановка, в результате которой новый ряд сходится к L.

▶ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + \ldots + u_n + \ldots$ — сходится

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + \ldots + |u_n| + \ldots$ — расходится

Выберем среди $\{u_n\}$ все неотрицательные и все отрицательные $\{p_n\}$, $p_n \geq 0$ и $\{-q_n\}$, $q_n > 0$

– Оба множества бесконечны, т.е. являются числовыми последовательностями

– $\sum_{k=1}^{\infty} p_n$ и $\sum_{k=1}^{\infty} q_n$ – расходящиеся ряды с неотриц. слагаемыми, след. их частичные суммы явл. ББ пос-ми

(Если $\sum q_k$ сходится, то $\sum_{n=1}^{N} u_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{l_1} p_n}_{S'_{l_1}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{l_2} q_n}_{S''_{l_2}}$

Построение перестановки ряда, сходящейся к L

шаг 1: p_1 Если $p_1 \ge L$, то к шагу 2

$p_1 < L$, то добавим к нему ещё неотриц. слагаемые так, чтобы

$$p_1+p_2+\dots+p_{n_1-1} < L \le \underbrace{p_1+p_2+\dots+p_{n_1-1}+p_{n_1}}_{S_1}$$

шаг 2: Прибавляем к результату шага 1 отриц. слагаемые

$$S_1 - q_1 - q_2 - \dots - q_{k_2} < L \le S_1 - q_1 - q_2 - \dots - q_{k_2-1}$$

продолжить аналогично

$S_1 - L \le p_{n_1}$ | $(S_1 - q_1) - L \le p_{n_1}$, $(S_1 - q_2) - L \le p_{n_2}$ | $|S_2 - L| < q_{k_2}$

■

Замечание Доказать самостоятельно, что перестановкой слагаемых усл. сход-ся ряда можно добиться того, что частичные суммы нового ряда стр. к $+\infty$ $(-\infty)$.

Теор. 10 (Коши)

Если ряд $\sum u_n$ сходится абсолютно, то любая его перестановка образует абсолютно сходящийся ряд, сумма которого = сумме исх. ряда

▶ Рассмотрим $\forall$ его перестановку $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'$ и пусть $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$. Докажем, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k' = S$.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n \geq N: \Big|\underbrace{S - \sum_{k=1}^{n} u_n}_{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k}\Big| < \varepsilon$$

В последних остатках ни при каком $n \geq N$ не встреч.-ся слагаемые $u_1, u_2, \dots, u_N$. Найдём в переставленном ряде позицию N_0, правее кот. нет $u_1, \dots, u_N$

$u_1+u_2+\dots+u_N+u_{N+1}+\dots+\cancel{u_2}+\dots+\cancel{u_m}+\dots+\cancel{u_2}+$

Оценим разность: $\sum_{k=1}^{n} u_k' - S$ при $n \geq N$.

$$\sum_{k=1}^{n} u_k' - S = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} u_k - S}_{|\dots| < \varepsilon} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} u_k' - \sum_{k=1}^{N} u_k}_{|\dots| \leq \sum\limits_{\substack{\text{уч.-т} \\ \text{номера} \geq N+1}} |u_k| \leq \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} |u_k|}$$

остаток сходящегося ряда

---

§4 Сложение и умножение рядов

Если $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ сходятся (и, значит, их частичные суммы U_n и V_n явл. сход.-ся посл-тями), то $\sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k)$ также сходится, его част. суммы равны $U_n \pm V_n$

$(u_1+\dots+u_n)(v_1+\dots+v_n)$

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \cdot \sum_{k=1}^{\infty} v_k$, и

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ \sum u_k \\ (2)\ \sum v_k\end{array}\right\} \to u_k v_j \ \forall k, j \xrightarrow{\text{перемнож.}} \text{новый ряд}$$

Теор. 11 Если (1), (2) сходятся абсолютно и их суммы равны U и V, то полученный перемножением рядов новый ряд также сходится абсолютно и его сумма $= UV$

▶ Пусть новый ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k$, где w_k – это какое-либо произведение $u_i v_j$.

Для того, чтобы доказать абсолютную сходимость, составим частичные суммы ряда $\sum |w_k|$ и покажем их ограниченность:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} |w_k|.$$

Среди всех уг-х здесь w_k выберем $\max i = i_0$ и $\max j = j_0$ в соотв-и $u_i v_j$

$$S_n \le (|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_{i_0}|)\cdot(|v_1|+|v_2|+\ldots+|v_{j_0}|) \le M$$

огр.-нность

Т.к. новый ряд $\sum w_k$ сходится абсолютно, то его сумма не зависит от того, как упорядочены слагаемые этого ряда (т. Коши)

Переупорядочим слагаемые так, чтобы среди част. сумм нового ряда были суммы вида $(u_1+\ldots+u_l)(v_1+\ldots+v_m)$, $\forall l, m$

Эта подпосл.-ть сумм, очевидно, сходится к UV ∎

Теор. 12 (т. Мертенс)

$\exists$ ряд (1) сход. абсолютно, (2) сх. условно.

Тогда ряд из произведений $\sum w_k$ сходится к UV, если его слагаемые упорядочить спец. образом.

$$\begin{array}{llll} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & \ldots \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \ldots & \\ u_3v_1 & \ldots & & \end{array}$$

$$w_1 = u_1v_1$$
$$w_2 = u_1v_2 + u_2v_1$$
$$w_3 = u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1$$
$$\ldots$$
$$\to \sum_{k=1}^{\infty} w_k$$

▶ Частичн. суммы

$$\sum_{k=1}^{n} w_k = u_1 \underbrace{(v_1 + \ldots + v_n)}_{V_n} + u_2 \underbrace{(v_1 + \ldots + v_{n-1})}_{V_{n-1}} + \ldots + u_n \underbrace{v_1}_{V} \ominus$$

Ряд (2) сходится к V, тогда посл-ть $\alpha_n = V - V_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\ominus \; u_1(V-\alpha_n) + u_2(V-\alpha_{n-1}) + \ldots + u(V-\alpha_1) =$$

$$= \underbrace{V(u_1 + \ldots + u_n)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} VU} - \underbrace{(u_1\alpha_n + u_2\alpha_{n-1} + \ldots + u_n\alpha_1)}_{\to \overset{?}{0}}$$

$$(\ldots) \underset{\forall m < n}{=} (u_1\alpha_n + u_2\alpha_{n-1} + \ldots + u_m\alpha_{n+1-m}) + (u_{m+1}\alpha_{n-m} + \ldots + u_n\alpha_1)$$

Т.к. $\{\alpha_n\}$ — б.м., то $\exists M \; |\alpha_n| \le M \; \forall n$

Т.к. $\sum |u_n|$ сход., то его частичн. суммы ограничены

$$\exists M: \sum_{k=1}^{n} |u_k| \le M \quad \forall n$$

страница 30

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N}: \quad \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad (3)$

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \quad |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad (4)$

$(\forall n \geq n_0) \qquad \forall k \geq n - m + 1 \geq n_0 - 1 + m$

$$\Rightarrow \quad \left|(\ldots)\right| \leq \left(|u_1||\alpha_n| + \ldots + |u_m||\alpha_{n+1-m}|\right) + \left(|u_{m+1}||\alpha_{n-m}| + \ldots + |u_n||\alpha_1|\right) \leq \frac{\varepsilon}{2M}\left(|u_1| + \ldots + |u_m|\right) + M\left(|u_{m+1}| + \ldots + |u_n|\right) \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + M \cdot \underbrace{\frac{\varepsilon}{2M}}_{(3)} = \varepsilon$$

∎

<u>Замечание</u> Если оба ряда (1) и (2) сх.-ся условно, то их произведение, даже построенное по правилу теор. 12, может давать расход. ряд.

§5. Сходимость произвольных рядов

Если $\sum |u_k|$ сх., то $\sum u_k$ сход.

Абель (1802 – 1829)

1. Преобразование Абеля

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \quad \forall n \geq 1$$

$$S_0 \equiv 0$$

$$u_k = S_k - S_{k-1} \quad \forall k \geq 1$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (S_k - S_{k-1}) v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} S_{k-1} v_k \ominus$$

$$k - 1 \equiv t$$

$$\ominus \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k v_k - \sum_{t=n}^{n+p-1} S_t v_{t+1} = \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k v_{k+1} =$$

$$= S_{n+p} v_{n+p} - S_n v_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k$$

страница 32

2. Последовательность с ограниченным изменением

Опр.) $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ наз. последовательностью с огр. изменением, если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |v_{k+1}-v_k|$ сходится B.V. = bounded variation

Утв. 1 Если посл.-ть имеет ограниченное изменение (B.V.), то она сходится

▶ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |v_{k+1}-v_k|$ сх. $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} (v_{k+1}-v_k)$ сходится к S.

Его частичные суммы $S_n=(v_2-v_1)+(v_3-v_2)+\dots+(v_{n+1}-v_n) =$

$= v_{n+1}-v_1 \to S \Rightarrow \{v_n\} \to S+v_1$ ■

Утв. 2 Сущ-т сходящиеся посл-ти, не имеющие B.V.

▶ $v_k = \dfrac{(-1)^{k+1}}{k} \to 0$

$$v_{k+1}-v_k = \frac{(-1)^{k+2}}{k+1} - \frac{(-1)^{k+1}}{k} = (-1)^{k+2}\left[\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k}\right] =$$

$$= (-1)^{k+2}\cdot\boxed{\left(\frac{2k+1}{k(k+1)}\right)}$$

S^{2k}

■

<u>Утв. 3</u> Если посл.-ть монотонна и ограничена, то она явл. посл.-тью с огран. измен.

▶ $\exists \{V_k\} \searrow$ и огр. $\Rightarrow \{V_k\} \to V \quad n \to \infty$

$$|V_{k+1} - V_k| = V_k - V_{k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{N} |V_{k+1} - V_k| = \sum_{k=1}^{N} |V_k - V_{k+1}| = V_1 - V_N$$

3. Признак Абеля

<u>Теор. 13</u> Рассм. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k$. (*)

Если: 1) посл-ть частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ огр.-на

2) $\{V_k\} \to 0$, B.V.

то ряд * сходится.

<u>Теор. 14</u> Рассм. ряд *

Если: 1) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится

2) $\{V_k\}$ B.V.

то ряд * сх.-ся

Ex.) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\ln k}$

$u_k = (-1)^{k+1}$, $v_k = \frac{1}{\ln k} \searrow 0$

$\underbrace{1 - 1 + 1 - 1}_{1}$ $\qquad$ $\underbrace{}_{2}$

Ex.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k}{k^\alpha}$, $u_k = \cos k$, $v_k = \frac{1}{k^\alpha} \searrow 0$

$\alpha > 0$

$\forall \alpha > 0 \quad \cos 1 + \cos 2 + \ldots + \cos n = \frac{\sin \frac{1}{2}}{\sin \frac{1}{2}} (\cos 1 + \ldots + \cos n) =$

$\sin \beta \cos \gamma = \frac{1}{2}(\sin(\beta + \gamma) + \sin(\beta - \gamma))$

$= \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}} \left(\sin\frac{3}{2} + \sin\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin\frac{5}{2} + \sin\left(-\frac{3}{2}\right) + \ldots + \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) + \sin\left(\frac{1}{2} - n\right)\right) =$

$= \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}} \left(\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) - \sin\left(\frac{1}{2}\right)\right)$, $|\ldots| \leq \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$

Теор. 13

Теор. 14

$(*) \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k$

▶ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists ?N \ \forall n \geq N \ \forall p \in \mathbb{N}:$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k \right| < \varepsilon$$

Лекция 5

18.09.18

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_n v_{n+1}$$

$$S_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_k$$

(т. 13)

$$\{S_k\} \text{ огран. } \nearrow \sum_{k=1}^{\infty} |v_k - v_{k+1}| < \infty$$

$$\{v_k\} - B.V., \ \{v_k\} \to 0$$

$\exists \ M > 0: \ |S_n| \leq M \ \forall k$

Выберем $N: \forall n \geq N: \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} |v_k - v_{k+1}| < \frac{\varepsilon}{2M}, \ |v_n| < \frac{\varepsilon}{4M}$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \underbrace{|S_n|}_{\leq M} |v_n - v_{n+1}| + \underbrace{|S_{n+p}|}_{\leq M} \underbrace{|v_{n+p}|}_{< \frac{\varepsilon}{4M}} + \underbrace{|S_n|}_{\leq M} \underbrace{|v_{n+1}|}_{< \frac{\varepsilon}{4M}} <$$

$$< M \cdot \underbrace{\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_n - v_{n+1}|}_{< \frac{\varepsilon}{2M}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

(т.14) $S_k = u_1 + \ldots + u_k \longrightarrow S$, $v_k \to V$

$\sum u_k$ сходится

$\{v_n\}$ – B.V., сход.

$\exists M > 0: \ |S_k| \le M \ \forall k$

$\exists N: \forall n \ge N \qquad \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |v_k - v_{k+1}| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \forall p \in \mathbb{N}$

$|S_n v_n - SV| < \frac{\varepsilon}{4}$

$|S_n v_{n+1} - SV| < \frac{\varepsilon}{4}$

$\Rightarrow \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| \le \sum\limits_{k=n+1}^{n+p-1} \underbrace{|S_k|}_{\le M} |v_k - v_{k+1}| + |S_{n+p} v_{n+p} - SV| +$

$+ |S_n v_{n+1} - SV| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Теор. 15 (пр.-к Дирихле - Абеля)

Пусть: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ обладает ограниченной последовательностью частичных сумм

2) $\{v_n\} \searrow 0$ $n \to \infty$

Тогда ряд * сходится

▶ $\{v_n\}$ моном. $\Rightarrow$ $\{v_n\}$ B.V. $\overset{т.13}{\Rightarrow}$ ■

Теор. 16 (пр-к Абеля)

Пусть 1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится

2) $\{v_n\}$ монотонна и ограничена.

Тогда ряд (*) сходится ▶ из т. 14 ■

Теор. 17 (пр-к Лейбница)

Рассм. знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$, $b_n \geq 0 \ \forall n$

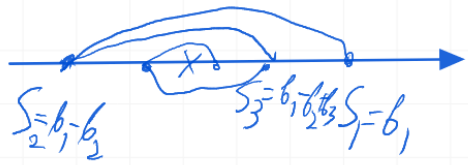
Если $\{b_n\} \searrow 0$, то этот ряд сходится.

▶ $u_n = (-1)^{n+1}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ – его част. суммы равны либо 0, либо 1.

$v_n = b_n \overset{т.15}{\Longrightarrow}$ ■

Замечание: Частичные суммы знакочеред. рядов обладают следующим св-вом:

Если $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$



$(b_3 \le b_2)$

$S_{2n} \le S \le S_{2n+1} \quad \forall n$

$\Rightarrow 0 \le S - S_{2n} \le S_{2n+1} - S_{2n} = b_{2n+1} \le b_{2n}$

$0 \le S_{2n+1} - S \le S_{2n+1} - S_{2n} = b_{2n+1}$

$\forall n: |S_n - S| < b_n$

Ex. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k}{k^\alpha}$ сходится при $\forall \alpha > 0$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^\alpha}$ сходится при $\forall \alpha > 0$, если $x \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$

(! Делим на $\sin \frac{x}{2}$)

1. Покажем его абс. сходимость при $\alpha > 1$: $\left|\frac{\cos kx}{k^\alpha}\right| \le \frac{1}{k^\alpha}$, $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ сходится

2. Покажем, что при $\alpha \in (0; 1]$ ряд сходится условно

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|\cos kx|}{k^\alpha} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos^2 kx}{k^\alpha} = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2k^\alpha}}_{\to +\infty} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{\cos 2kx}{2k^\alpha}}_{\text{т. сумма сх. ряда} \Rightarrow \text{огр.}} \Rightarrow$$

$|\cos\alpha| \geq \cos^2\alpha$

$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N} \frac{|\cos kx|}{k^\alpha} \to +\infty$$

$\left(x = \pi + 2\pi m\right.$ – отдельно?$\left.\right)$

§6. Бесконечные произведения.

Ex. $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^{n-1}})\cdot\frac{1-x}{1-x}=$

$=\frac{1-x^{2^n}}{1-x}\longrightarrow\frac{1}{1-x}$, если $|x|<1$

$(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2^{n-1}})\dots=\frac{1}{1-x}$

Обозначение: $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+x^{2^{n-1}})=\frac{1}{1-x}$

Опр. $\exists\, p_n\in\mathbb{R}$ и рассмотрим $P_n=\prod\limits_{k=1}^{n}p_k$

Говорят, что определено беск. произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty}p_k=P$, если $\{P_n\}\xrightarrow[n\to\infty]{}P$

Опр. Бесконечное произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty}p_k\dots(1)$ сходится к P, если:

1) $\{P_n\}\to P$

2) $P\neq 0$

Если же $P=0$, то говорят, что (расх.) к 0

Теор. 18 (необх. усл. сходимости)

Если (1) сходится, то $\{p_n\} \to 1$

▶ $\{P_n\} \to P \neq 0 \Rightarrow p_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \to \frac{P}{P} = 1$ ■

Будем далее рассматривать только те бесконечные пр-я, в кот. выполнено необх. усл. сходимости.

Так как (аналогично числ. рядам) отбрасывание $\forall$ конечного числа сомножителей не влияет на сходимость, будем считать, что все $p_n > 0$

Теор. 19 Беск. пр-е (1) сходится и расходится одновременно с числовым рядом $\sum_{k=1}^{\infty} \ln p_k$, (2) причём его сумма и P связаны.

▶ $P_n = \prod_{k=1}^{n} p_k \to e^S = P$

$\ln P_n = \sum_{k=1}^{n} \ln p_k = S_n \to S = \ln P$

Теор. 20 Пусть в беск. произв. (1) $p_n \geq 1$ $\forall n \geq k_0$

Тогда (1) сходится $\iff$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1)$

▶ Ряд (2) с неотриц. слагаемыми; $p_n \to 1$

$$\ln \underset{\to 0}{p_n} = \ln(1 + \underbrace{(p_n - 1)}_{\to 0}) \sim p_n - 1, \quad n \to \infty$$

В силу призн. сравнения $\Rightarrow$ ■

Ex.

$$x \prod_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)}_{\neq 1} \text{ сход.} \iff \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \iff \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{k^2\pi^2}$$

сх.

$x \neq k\pi$ $\forall k$

$$x = \frac{\pi}{2}: \quad 1 = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2n)^2}\right)$$

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2n)^2}\right), \quad \pi = 2 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n)^2 - 1}$$

Ф-ла Валлиса

Теор. 21 Рассмотрим беск. произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$, $\forall u_n > -1$

Если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{k=1}^{\infty} u_n^2$, то беск. произв. сходится.

▶ (т. 19) Изучим сх.-ть ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+u_n)$;

в силу условия $\{u_n\} \to 0$

$$\ln(1+u_n) = u_n - \frac{1}{2}u_n^2 + o(u_n^2)$$

$$u_n - \ln(1+u_n) = \frac{1}{2}u_n^2 + o(u_n^2)$$

$$\frac{u_n - \ln(1+u_n)}{u_n^2} = \frac{1}{2} + \bar{o}(1)$$

$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n - \ln(1+u_n))$ с неотр. слаг. $\forall k > k_0$ $\overset{\text{пр. ср.}}{\Longleftrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$

Т.к. $\sum u_n$ сходится, $\sum \ln(1+u_n)$ сход. ■

Зам. Вводится понятие условной сходимости беск. пр-ния: $\prod_{k=1}^{\infty} p_n$ усл. сх. $\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \ln p_n$ сход. условно

~~абс.~~ сх. $\Longleftrightarrow$ сход. абсолютно

безусловно – можно делать перестановки

$$\sin x = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

$$x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\dots$$

усл.

§ 7. Эл-ты теории двойных и повторных рядов

ЛЕКЦИЯ №6
19.09.18

$a_{ij};\quad i,j \geq 1$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} & \dots \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix}$$

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij};\quad S_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} -$$

– част. сумма двойн. ряда

Опр.) Двойной ряд сходится к S, если

$$\exists \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} S_{mn} = S$$

(Коши) $\forall\varepsilon\quad \exists M,N\in\mathbb{N}: \forall m\geq M\ \forall n\geq N: |S_{mn}-S|<\varepsilon$

Ex. $a_{ij} = b_i c_j \quad \forall i,j$

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_i c_j = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} c_j\right)$$

Если $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$, $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ сходятся, то $S_{mn} \to S = BC$

$\left(B=\sum_{i=1}^{\infty} b_i,\ C=\sum_{j=1}^{\infty} c_j\right)$

$\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}$; $\quad A_i = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ — сход. $\forall i$

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\Big) \quad \text{повторный ряд}$$

$$B_j = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} B_j = \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\Big) \quad \text{повторный ряд}$$

Ex. 2

$$\begin{array}{cccccc}
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \dots \\
-1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots \\
-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \dots \\
\frac{1}{3} & \dots & & & & \\
\dots & & & & &
\end{array}$$

1) по строчкам (I повт.) — расходится т.к. A_i — расх. ряды

2) по столбцам: (II повт. ряд) $B_j = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ сходится к 0

3) $S_{mn} = 0$, если m четно

$S_{mn} = 0$, если m — нечет., n — четно

$S_{mn} - a_{mn} \to 0$, если m — неч., n — неч.

Дв. ряд сходится к нулю

Ex. 3.

$$\begin{array}{cccccc}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \dots
\end{array}$$

1) A_i сход. к 0 $\Rightarrow$ I повт. ряд сход. к 0

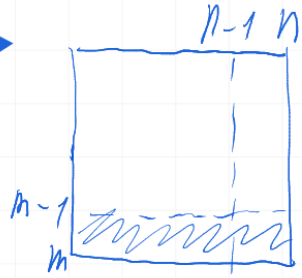
2) B_j – сходятся $B_1 = 1$, $B_j = 0$ $\forall j \geq 2$ $\Rightarrow$ II й повт. ряд сход. к 1

3) Двойной ряд $S_{mm} = 1$, $S_{m,m+1} = 0$ — расходится

Теор. 22 (Необх. усл. сходимости двойного ряда)

Если двойной ряд $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}$ сходится, то $\{a_{ij}\} \to 0$

▶



$$a_{mn} = S_{mn} - S_{m-1,n} - S_{m,n-1} + S_{m-1,n-1}$$

$$S_{kl} \xrightarrow[k,l\to\infty]{} S \Rightarrow a_{mn} \to 0$$

■

Теор. 23 (Связь между сходимостью двойного и повторного рядов)

Пусть дв. ряд $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}$ сходится (к S), а также сходятся все "строчные" ряды $A_i = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij}$. Тогда сходится и повторный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, его сумма также равна S

▶ Рассм. част. сумму дв. ряда $S_{mn} = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} S_{mn} = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{m} A_i = \sigma(m)$

Д-ть сход.-ть повт. ряда $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_m$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M \ \forall m \ge M \ |S_{mn} - S| < \varepsilon, \ n \to \infty$

$\Rightarrow |\sigma_{mn} - S| \le \varepsilon$

$S = \lim\limits_{m\to\infty} \sigma_m$ ■

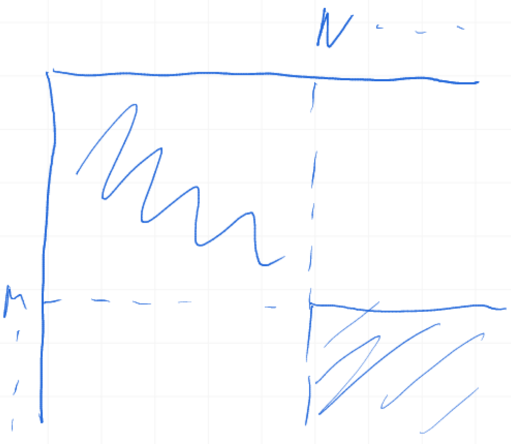
Теор. 24 (критерий сходимости дв. ряда с неотр. слагаемыми)

Рассм. $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}$, в кот. $a_{ij} \ge 0 \ \forall i,j$

Данный дв. ряд сход. $\Leftrightarrow \{S_{mn}\}$ ограничено

▶ $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M, N: \forall m \ge M, n \ge N \ |S_{mn} - S| < \varepsilon$

$S - \varepsilon < S_{mn} < S + \varepsilon$



$\Leftarrow$ Т.о. $\exists \sup\limits_{m,n} \{S_{mn}\} = S$

а) $S_{mn} \le S \ \forall m,n$

б) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists m_0, n_0 \ S_{m_0 n_0} > S - \varepsilon$

$\forall m \ge m_0, n \ge n_0 \quad S_{mn} \ge S_{m_0 n_0}$

Т.о. $S \ge S_{mn} \ge S_{m_0 n_0} > S - \varepsilon$; $S - \varepsilon < S_{mn} \le S < S + \varepsilon$ ■

Дв. ряд $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}$ $(\forall a_{ij})$; (1)

$\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|$ (2)

Ряд (1) сходится абсолютно, если сх. ряд (2)

Теор. 25 Если сходится (2), то сходится (1)

▶ Пусть $p_{ij} = |a_{ij}| + a_{ij} \geq 0$

$q_{ij} = |a_{ij}| - a_{ij} \geq 0$

Рассм. ряды $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} p_{ij}$, $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} q_{ij}$ – сходятся

Применим к ним т. 24

Мн-во част. сумм ряда $\sum |a_{ij}|$ огр. сверху $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ то же самое для этих 2 рядов $\Rightarrow$ сход.

$\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} p_{ij} - \sum\limits_{i,j=1}^{\infty} q_{ij} = 2\sum\limits_{i,j=1} a_{ij}$ также сходится

Теор. 26 (О „перестановке слагаемых" в абс. сходящемся двойном ряде).

Рассм. след. ряды: $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}$ (1.1), $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ (1.2), $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{ij}$ (1.3), $\sum\limits_{r=1}^{\infty} a_r'$ (1.4)

где a_r' – каким-либо образом упорядоченные (перенумерованные) эл-ты a_{ij}.

$\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|$ (2.1), $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$ (2.2), $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|$ (2.3), $\sum\limits_{r=1}^{\infty} |a_r'|$ (2.4)

Если сходится хотя бы один из рядов (2.1) – (2.4), то сходятся все ряды (1.1) – (1.4), причем к одной и той же сумме

▶ ① Докажем, что если сходится хотя бы один ряд (2.1) – (2.4), то сходятся все другие из них.

лекция 7

25.09.18

$(2.1) \Downarrow (2.2)$, $(2.1) \Rightarrow (2.3)$, $(2.3) \Rightarrow (2.2)$, $(2.2) \Downarrow (2.4)$, $(2.4) \Downarrow (2.1)$

$\boxed{(2.1) \Rightarrow (2.2)}$ $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$ $\forall i$

$\sum\limits_{j=1}^{M} |a_{ij}| \le S_{iM}$ – част. сумма ряда (2.1) – огр.-на

$\Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{M} |a_{ij}|$ огр. $\Rightarrow$ все строчные ряды сходятся $\Rightarrow$

$\overset{(T.23)}{\Rightarrow}$ (2.2) сх.

Заметим, что отсюда следует сходимость дв. ряда (1.1) (т.25) и сходимость рядов $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ ($\forall i$)

В силу т. 23 сходится (1.2)

(2.2) ⇒ (2.4) Рассм. частичную сумму S_p' ряда (2.4). Среди слагаемых, участвующ. в S_p', выберем max номер строки и столбца – строка #M и ст-ц #N

$\Rightarrow S_p' \le S_{MN}$ – част. сумма дв.-го ряда (2.1)

$N \to \infty \quad S_p' \le \sum\limits_{i=1}^{M} \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \le C \Rightarrow$

⇒ ряд (2.4) сходится ⇒ ряд (1.4) сходится

(2.4) ⇒ (2.1) Рассм. частичную сумму дв. ряда (2.1): S_{mn}

Т.к. в (2.4) занумерованы все эл-ты a_{ij}, то ∃ такая част. сумма S_p', в кот. есть все слаг. S_{mn}

▶ Все суммы рядов (1.1) – (1.4) одинаковы, т.к. (1.1), (1.2), (1.3) имеют одинак. суммы в силу т.23; ряды (1.1) и (1.4) имеют одну сумму т.к. абс. сходятся ⇒ (т. Коши) сумма ряда не меняется при ∀ упорядочении слагаемых. ■